Condiciones de integrabilidad óptimas sobre el dato inicial para los problemas del calor y de Poisson en el semiplano superior

Beatriz Viviani

Instituto de Matemática Aplicada del Litoral-Universidad Nacional del Litoral

Seminario del IMAL "Carlos Segovia Fernandez"
Junio 2016

Ecuaciones del Calor y del Poisson

Consideremos las ecuaciones en $\mathbb{R}^{d+1}_{+}$

- **Ecuación del Calor:** $$\begin{cases} u_t = \Delta u, & t \in (0,\infty) \times \mathbb{R}^d \\ u(0,x) = f(x) \end{cases} \qquad \text{(H)}$$

- **Ecuación de Poisson:** $$\begin{cases} u_{tt} = -\triangle u, & t \in (0,\infty) \times \mathbb{R}^d \\ u(0,x) = f(x) \end{cases} \qquad \text{(P)}$$

Ecuaciones del Calor y del Poisson

Consideremos las ecuaciones en $\mathbb{R}^{d+1}_{+}$

- **Ecuación del Calor:** $$\begin{cases} u_t = \Delta u, & t \in (0,\infty) \times \mathbb{R}^d \\ u(0,x) = f(x) \end{cases} \qquad \text{(H)}$$

- **Ecuación de Poisson:** $$\begin{cases} u_{tt} = -\triangle u, & t \in (0,\infty) \times \mathbb{R}^d \\ u(0,x) = f(x) \end{cases} \qquad \text{(P)}$$

- **Pregunta:** es posible encontrar condiciones de integrabilidad óptimas sobre f tal que

Ecuaciones del Calor y del Poisson

Consideremos las ecuaciones en $\mathbb{R}^{d+1}_{+}$

- **Ecuación del Calor:** $\begin{cases} u_t = \Delta u, & t \in (0,\infty) \times \mathbb{R}^d \\ u(0,x) = f(x) \end{cases}$ (H)

- **Ecuación de Poisson:** $\begin{cases} u_{tt} = -\triangle u, & t \in (0,\infty) \times \mathbb{R}^d \\ u(0,x) = f(x) \end{cases}$ (P)

  - **Pregunta:** es posible encontrar condiciones de integrabilidad óptimas sobre f tal que
    1. $u(x,t) = f * h_t(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^{d+1}_{+})$ y satisface $u_t = \Delta u$
    2. existe $\lim_{t \mapsto 0} f * h_t(x) = f(x)$ para $a.e. x \in \mathbb{R}^d$

Ecuaciones del Calor y del Poisson

Consideremos las ecuaciones en $\mathbb{R}^{d+1}_+$

- **Ecuación del Calor:** $\begin{cases} u_t = \Delta u, & t \in (0,\infty) \times \mathbb{R}^d \\ u(0,x) = f(x) \end{cases}$ (H)

- **Ecuación de Poisson:** $\begin{cases} u_{tt} = -\triangle u, & t \in (0,\infty) \times \mathbb{R}^d \\ u(0,x) = f(x) \end{cases}$ (P)

- **Pregunta:** es posible encontrar condiciones de integrabilidad óptimas sobre f tal que
  1. $u(x,t) = f * h_t(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^{d+1}_+)$ y satisface $u_t = \Delta u$
  2. existe $\lim_{t\mapsto 0} f * h_t(x) = f(x)$ para $a.e.x \in \mathbb{R}^d$

  (Wilcox'80, T. Rep de Widder'75, $f = d\mu$, $n = 1$)

Consideremos las ecuaciones en $\mathbb{R}^{d+1}_{+}$

- **Ecuación del Calor:** $$\begin{cases} u_t = \Delta u, & t \in (0,\infty) \times \mathbb{R}^d \\ u(0,x) = f(x) \end{cases} \qquad \text{(H)}$$

- **Ecuación de Poisson:** $$\begin{cases} u_{tt} = -\triangle u, & t \in (0,\infty) \times \mathbb{R}^d \\ u(0,x) = f(x) \end{cases} \qquad \text{(P)}$$

- **Pregunta:** es posible encontrar condiciones de integrabilidad óptimas sobre f tal que
  1. $u(x,t) = f * h_t(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^{d+1}_{+})$ y satisface $u_t = \Delta u$
  2. existe $\lim_{t \mapsto 0} f * h_t(x) = f(x)$ para $a.e. x \in \mathbb{R}^d$

  (Wilcox'80, T. Rep de Widder'75, $f = d\mu,\ n = 1$)
- Idem para Poisson

Ecuaciones del Calor y del Poisson

Consideremos las ecuaciones en $\mathbb{R}^{d+1}_{+}$

- **Ecuación del Calor:** $$\begin{cases} u_t = \Delta u, & t \in (0,\infty) \times \mathbb{R}^d \\ u(0,x) = f(x) \end{cases} \qquad \text{(H)}$$

- **Ecuación de Poisson:** $$\begin{cases} u_{tt} = -\triangle u, & t \in (0,\infty) \times \mathbb{R}^d \\ u(0,x) = f(x) \end{cases} \qquad \text{(P)}$$

- **Pregunta:** es posible encontrar condiciones de integrabilidad óptimas sobre f tal que
  1. $u(x,t) = f * h_t(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^{d+1}_{+})$ y satisface $u_t = \Delta u$
  2. existe $\lim_{t\mapsto 0} f * h_t(x) = f(x)$ para $a.e.x \in \mathbb{R}^d$

  (Wilcox'80, T. Rep de Widder'75, $f = d\mu,\ n = 1$)
- Idem para Poisson
- Este problema tiene una solución simple: estimación directa del núcleo y Teor. dif. de Lebesgue

Dato inicial óptimo

Sea $h_t(x) = (4\pi t)^{-\frac{d}{2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}$ el núcleo del calor.

Dato inicial óptimo

Sea $h_t(x) = (4\pi t)^{-\frac{d}{2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}$ el núcleo del calor.

Proposición 1:

Sea $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ medible. Entonces son equivalentes:

- $\int_{\mathbb{R}^d} h_t(x-y)|f(y)|dy < \infty$, para todo $t \in (0, \infty)$ y $x \in \mathbb{R}^d$

Dato inicial óptimo

Sea $h_t(x) = (4\pi t)^{-\frac{d}{2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}$ el núcleo del calor.

Proposición 1:

Sea $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ medible. Entonces son equivalentes:

- $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^d} h_t(x-y)|f(y)|dy < \infty$, para todo $t \in (0,\infty)$ y $x \in \mathbb{R}^d$
- $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^d} h_t(x_t-y)|f(y)|dy < \infty$, para todo $t \in (0,\infty)$ y algún $x_t \in \mathbb{R}^d$

Dato inicial óptimo

Sea $h_t(x) = (4\pi t)^{-\frac{d}{2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}$ el núcleo del calor.

Proposición 1:

Sea $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ medible. Entonces son equivalentes:

- $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^d} h_t(x-y)|f(y)|dy < \infty$, para todo $t \in (0,\infty)$ y $x \in \mathbb{R}^d$
- $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^d} h_t(x_t-y)|f(y)|dy < \infty$, para todo $t \in (0,\infty)$ y algún $x_t \in \mathbb{R}^d$
- $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^d} |f(y)|\, e^{-a|y|^2}\, dy < \infty$, para todo $a > 0$

Dato inicial óptimo

Sea $h_t(x) = (4\pi t)^{-\frac{d}{2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}$ el núcleo del calor.

Proposición 1:

Sea $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ medible. Entonces son equivalentes:

- $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^d} h_t(x-y)|f(y)|dy < \infty$, para todo $t \in (0,\infty)$ y $x \in \mathbb{R}^d$
- $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^d} h_t(x_t-y)|f(y)|dy < \infty$, para todo $t \in (0,\infty)$ y algún $x_t \in \mathbb{R}^d$
- $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^d} |f(y)|\, e^{-a|y|^2}\, dy < \infty$, para todo $a > 0$

- Estimación elemental

$$\frac{1}{c}\, e^{-\frac{|y|^2}{4t}(\frac{M+1}{M})^2} \leq e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} \leq c\, e^{-\frac{|y|^2}{4t}(\frac{M-1}{M})^2}, \qquad y \in \mathbb{R}^d$$

con $c = c(x,t,M) > 0$

Dato inicial óptimo

Sea $h_t(x) = (4\pi t)^{-\frac{d}{2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}$ el núcleo del calor.

Proposición 1:

Sea $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ medible. Entonces son equivalentes:

- $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^d} h_t(x-y)|f(y)|dy < \infty$, para todo $t \in (0,\infty)$ y $x \in \mathbb{R}^d$
- $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^d} h_t(x_t-y)|f(y)|dy < \infty$, para todo $t \in (0,\infty)$ y algún $x_t \in \mathbb{R}^d$
- $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^d} |f(y)|\, e^{-a|y|^2}\, dy < \infty$, para todo $a > 0$

- Estimación elemental $\left(|y| > M|x| \Rightarrow \frac{M+1}{M}|y| > |x-y| > \frac{M-1}{M}|y|\right)$

$$\frac{1}{c}\, e^{-\frac{|y|^2}{4t}(\frac{M+1}{M})^2} \leq e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} \leq c\, e^{-\frac{|y|^2}{4t}(\frac{M-1}{M})^2}, \qquad y \in \mathbb{R}^d$$

con $c = c(x,t,M) > 0$

Dato inicial óptimo

Sea $h_t(x) = (4\pi t)^{-\frac{d}{2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}$ el núcleo del calor.

Proposición 1:

Sea $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ medible. Entonces son equivalentes:

- $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^d} h_t(x-y)|f(y)|dy < \infty$, para todo $t \in (0,\infty)$ y $x \in \mathbb{R}^d$
- $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^d} h_t(x_t-y)|f(y)|dy < \infty$, para todo $t \in (0,\infty)$ y algún $x_t \in \mathbb{R}^d$
- $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^d} |f(y)|\, e^{-a|y|^2}\, dy < \infty$, para todo $a > 0$

- Estimación elemental $(|y| > M|x| \Rightarrow \frac{M+1}{M}|y| > |x-y| > \frac{M-1}{M}|y|)$

$$\frac{1}{c}\, e^{-\frac{|y|^2}{4t}(\frac{M+1}{M})^2} \le e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} \le c\, e^{-\frac{|y|^2}{4t}(\frac{M-1}{M})^2}, \qquad y \in \mathbb{R}^d$$

con $c = c(x,t,M) > 0$ $(y \mapsto e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}}$ en $|y| \le M|x|)$

Más aún

- En este caso, esto es, si (*) $f \in L^1(\varphi)$ con $\varphi = e^{-a|y|^2}$, $a > 0$ entonces

Más aún

- En este caso, esto es, si (*) $f \in L^1(\varphi)$ con $\varphi = e^{-a|y|^2}$, $a > 0$ entonces
  1. $u(x,t) = f * h_t(x) \in C^\infty(\mathbb{R}_+^{d+1})$ y satisface $u_t = -\Delta u$

Más aún

- En este caso, esto es, si (*) $f \in L^1(\varphi)$ con $\varphi = e^{-a|y|^2}$, $a > 0$ entonces
  1. $u(x,t) = f * h_t(x) \in C^\infty(\mathbb{R}_+^{d+1})$ y satisface $u_t = -\Delta u$
  2. existe $\lim_{t \mapsto 0} f * h_t(x) = f(x)$ para $a.e. x \in \mathbb{R}^d$

Más aún

- En este caso, esto es, si (*) $f \in L^1(\varphi)$ con $\varphi = e^{-a|y|^2}$, $a > 0$ entonces
  1. $u(x,t) = f * h_t(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^{d+1}_+)$ y satisface $u_t = -\Delta u$
  2. existe $\lim_{t\mapsto 0} f * h_t(x) = f(x)$ para $a.e. x \in \mathbb{R}^d$
- Para $\alpha \in \mathbb{N}^{d+1}$

$$D^{\alpha}_{t,x}[t^{-\frac{d}{2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}] = \Sigma_j t^{\gamma_j} p_j(x) e^{-\frac{|x|^2}{4t}}$$

Más aún

- En este caso, esto es, si (*) $f \in L^1(\varphi)$ con $\varphi = e^{-a|y|^2},\ a > 0$ entonces
    1. $u(x,t) = f * h_t(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^{d+1}_+)$ y satisface $u_t = -\Delta u$
    2. existe $\lim_{t\mapsto 0} f * h_t(x) = f(x)$ para $a.e.x \in \mathbb{R}^d$
- Para $\alpha \in \mathbb{N}^{d+1}$

$$D^\alpha_{t,x}[t^{-\frac{d}{2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}] = \Sigma_j t^{\gamma_j} p_j(x) e^{-\frac{|x|^2}{4t}}$$

Si (x,t) yace en un compacto de $\mathbb{R}^{d+1}_+$, $(*) \Rightarrow$

$$\int_{\mathbb{R}^d} D^\alpha_{t,x} h_t(x-y)|f(y)|dy < \infty$$

uniformemente en (x,t) y (1) se cumple

Para(2) es suficiente ver que $\forall n_0 \geq 1$

Para(2) es suficiente ver que $\forall n_0 \geq 1$

$$\lim_{t \to 0} f * h_t(x) = f(x) \quad \text{a.e.} \quad |x| \leq n_0$$

Para(2) es suficiente ver que $\forall n_0 \geq 1$

$$\lim_{t \to 0} f * h_t(x) = f(x) \quad \text{a.e.} \quad |x| \leq n_0$$

Dado $\epsilon > 0$ sea $M \geq 2n_0$ tal que $\int_{|y|>M} |f(y)| e^{-|y^2|} dy < \epsilon$. Partimos

Para(2) es suficiente ver que $\forall n_0 \geq 1$

$$\lim_{t \to 0} f * h_t(x) = f(x) \quad \text{a.e.} \quad |x| \leq n_0$$

Dado $\epsilon > 0$ sea $M \geq 2n_0$ tal que $\int_{|y|>M} |f(y)| e^{-|y^2|} dy < \epsilon$. Partimos

$$f = f\chi_{\{|y| \leq M\}} + f\chi_{\{|y|>M\}} = f_1 + f_2$$

Para(2) es suficiente ver que $\forall n_0 \geq 1$

$$\lim_{t\to 0} f * h_t(x) = f(x) \quad \text{a.e.} \quad |x| \leq n_0$$

Dado $\epsilon > 0$ sea $M \geq 2n_0$ tal que $\int_{|y|>M} |f(y)|e^{-|y^2|}dy < \epsilon$. Partimos

$$f = f\chi_{\{|y|\leq M\}} + f\chi_{\{|y|>M\}} = f_1 + f_2$$

Para f_2 notar que, cuando $|x| \leq n_0 \leq M/2 < \frac{|y|}{2}$ se tiene

$$h_t(x-y) = \frac{e^{-\frac{|y-x|^2}{4t}}}{(4\pi t)^{\frac{d}{2}}} \leq \frac{e^{-\frac{|y|^2}{16t}}}{(4\pi t)^{\frac{d}{2}}} \leq \frac{c_d}{|y|^d} e^{-\frac{|y|^2}{32t}} \leq c_d e^{-|y|^2} \quad t < \frac{1}{32}$$

Para(2) es suficiente ver que $\forall n_0 \geq 1$

$$\lim_{t \to 0} f * h_t(x) = f(x) \quad \text{a.e.} \quad |x| \leq n_0$$

Dado $\epsilon > 0$ sea $M \geq 2n_0$ tal que $\int_{|y|>M} |f(y)| e^{-|y^2|} dy < \epsilon$. Partimos

$$f = f\chi_{\{|y| \leq M\}} + f\chi_{\{|y|>M\}} = f_1 + f_2$$

Para f_2 notar que, cuando $|x| \leq n_0 \leq M/2 < \frac{|y|}{2}$ se tiene

$$h_t(x-y) = \frac{e^{-\frac{|y-x|^2}{4t}}}{(4\pi t)^{\frac{d}{2}}} \leq \frac{e^{-\frac{|y|^2}{16t}}}{(4\pi t)^{\frac{d}{2}}} \leq \frac{c_d}{|y|^d} e^{-\frac{|y|^2}{32t}} \leq c_d e^{-|y|^2} \quad t < \frac{1}{32}$$

Luego

$$|f_2 * h_t(x)| \leq c_d \epsilon \quad \forall |x| \leq n_0, \quad t < \frac{1}{32}$$

Como $f_1 \in L^1(\mathbb{R}^d)$ por el teoría de aproximación de la identidad para a.e. $|x_0| \leq n_0 \, \exists \delta = \delta(\epsilon, x_0) \in (0, \frac{1}{32})$ tal que

$$|h_t * f_1(x_0) - f(x_0)| < \epsilon, \ \ \forall t \in (0, \delta)$$

Corolario:

Sea $v : \mathbb{R}^d \to (0, \infty)$ medible $1 \leq p < \infty$ y $\varphi(y) = e^{-a|y|^2}$. Entonces son equivalentes:

- Para toda $f \in L^p(v)$, $u(x,t) = f * h_t(x)$ existe $\forall t, x$ y resuelve (h)

COROLARIO:

Sea $v : \mathbb{R}^d \to (0, \infty)$ medible $1 \leq p < \infty$ y $\varphi(y) = e^{-a|y|^2}$. Entonces son equivalentes:

- Para toda $f \in L^p(v)$, $u(x,t) = f * h_t(x)$ existe $\forall t, x$ y resuelve (h)
- $L^p(v) \subset L^1(\varphi)$

COROLARIO:

Sea $v : \mathbb{R}^d \to (0, \infty)$ medible $1 \leq p < \infty$ y $\varphi(y) = e^{-a|y|^2}$. Entonces son equivalentes:

- Para toda $f \in L^p(v)$, $u(x,t) = f * h_t(x)$ existe $\forall t, x$ y resuelve (h)
- $L^p(v) \subset L^1(\varphi)$
- $\varphi \in (L^p(v))' = L^{p'}(v^{-\frac{p'}{p}})$, o sea, $\|v^{-\frac{1}{p}}\varphi\|_{L^{p'}} < \infty \ \forall a > 0$.

f óptima-Poisson

Sea $p_t(x) = c\frac{t}{(t^2+|x-y|^2)^{\frac{d+1}{2}}}$ el núcleo de Poisson

Sea $p_t(x) = c\frac{t}{(t^2+|x-y|^2)^{\frac{d+1}{2}}}$ el núcleo de Poisson

Proposición 2:

Sea $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ medible. Entonces son equivalentes:

- $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^d} p_t(x-y)|f(y)|dy < \infty$, para todo $t \in (0,\infty)$ y $x \in \mathbb{R}^d$

f óptima-Poisson

Sea $p_t(x) = c\frac{t}{(t^2+|x-y|^2)^{\frac{d+1}{2}}}$ el núcleo de Poisson

Proposición 2:

Sea $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ medible. Entonces son equivalentes:

- $\int_{\mathbb{R}^d} p_t(x-y)|f(y)|dy < \infty$, para todo $t \in (0,\infty)$ y $x \in \mathbb{R}^d$
- $\int_{\mathbb{R}^d} p_t(x_t-y)|f(y)|dy < \infty$, para todo $t \in (0,\infty)$ y algún $x_t \in \mathbb{R}^d$

Sea $p_t(x) = c\frac{t}{(t^2+|x-y|^2)^{\frac{d+1}{2}}}$ el núcleo de Poisson

Proposición 2:

Sea $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ medible. Entonces son equivalentes:

- $\int_{\mathbb{R}^d} p_t(x-y)|f(y)|dy < \infty$, para todo $t \in (0,\infty)$ y $x \in \mathbb{R}^d$
- $\int_{\mathbb{R}^d} p_t(x_t-y)|f(y)|dy < \infty$, para todo $t \in (0,\infty)$ y algún $x_t \in \mathbb{R}^d$
- $\int_{\mathbb{R}^d} |f(y)| \frac{1}{(1+|y|^2)^{\frac{d+1}{2}}} dy < \infty$.

PRUEBA PROPOSICIÓN

Usando la estimación elemental:

- En $|y| > M|x| \Rightarrow \frac{M+1}{M}|y| > |x-y| > \frac{M-1}{M}|y|$

Usando la estimación elemental:

- En $|y| > M|x| \Rightarrow \frac{M+1}{M}|y| > |x-y| > \frac{M-1}{M}|y|$

$$\frac{1}{c}\left(1+|y|^2\right)^{-\frac{d+1}{2}} \leq \frac{t}{(t^2+|x-y|^2)^{\frac{d+1}{2}}} \leq c\left(1+|y|^2\right)^{-\frac{d+1}{2}},$$

con $c = c(x,t,M) > 0$

Usando la estimación elemental:

- En $|y| > M|x| \Rightarrow \frac{M+1}{M}|y| > |x-y| > \frac{M-1}{M}|y|$

$$\frac{1}{c}\left(1+|y|^2\right)^{-\frac{d+1}{2}} \leq \frac{t}{(t^2+|x-y|^2)^{\frac{d+1}{2}}} \leq c\left(1+|y|^2\right)^{-\frac{d+1}{2}},$$

con $c = c(x,t,M) > 0$

- En $|y| \leq M|x|$ $y \mapsto \frac{t}{(t^2+|x-y|^2)^{\frac{d+1}{2}}}$ continua

Recíprocamente

Recíprocamente

Teorema

Si $f \in L^1(\varphi(y))$ con $\varphi(y) = \frac{1}{(1+|y|^2)^{\frac{d+1}{2}}}$ entonces

- $u(x,t) = f * p_t(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^+)$ y satisface $u_t t + \Delta_\lambda u = 0$
- existe $\lim_{t \mapsto 0} f * p_t(x) = f(x)$ para $a.e. x \in \mathbb{R}^+$

Recíprocamente

Teorema

Si $f \in L^1(\varphi(y))$ con $\varphi(y) = \frac{1}{(1+|y|^2)^{\frac{d+1}{2}}}$ entonces

- $u(x,t) = f * p_t(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^+)$ y satisface $u_t t + \Delta_\lambda u = 0$
- existe $\lim_{t \mapsto 0} f * p_t(x) = f(x)$ para $a.e.x \in \mathbb{R}^+$

ÓPTIMA $f \in L^p(v)$- POISSON

COROLARIO:

Sea $v : \mathbb{R}^d \to (0, \infty)$ medible $1 \leq p < \infty$ y $\varphi(y) = \frac{1}{(1+|y|^2)^{\frac{d+1}{2}}}$. Entonces son equivalentes:

- Para toda $f \in L^p(v)$, $u(x,t) = f * p_t(x)$ existe $\forall t, x$ y resuelve (P)

COROLARIO:

Sea $v : \mathbb{R}^d \to (0, \infty)$ medible $1 \leq p < \infty$ y $\varphi(y) = \frac{1}{(1+|y|^2)^{\frac{d+1}{2}}}$. Entonces son equivalentes:

- Para toda $f \in L^p(v)$, $u(x,t) = f * p_t(x)$ existe $\forall t, x$ y resuelve (P)
- $L^p(v) \subset L^1(\varphi)$

COROLARIO:

Sea $v : \mathbb{R}^d \to (0, \infty)$ medible $1 \leq p < \infty$ y $\varphi(y) = \frac{1}{(1+|y|^2)^{\frac{d+1}{2}}}$. Entonces son equivalentes:

- Para toda $f \in L^p(v)$, $u(x,t) = f * p_t(x)$ existe $\forall t, x$ y resuelve (P)
- $L^p(v) \subset L^1(\varphi)$

ÓPTIMA $f \in L^p(v)$- POISSON

COROLARIO:

Sea $v : \mathbb{R}^d \to (0, \infty)$ medible $1 \leq p < \infty$ y $\varphi(y) = \frac{1}{(1+|y|^2)^{\frac{d+1}{2}}}$. Entonces son equivalentes:

- Para toda $f \in L^p(v)$, $u(x,t) = f * p_t(x)$ existe $\forall t, x$ y resuelve (P)
- $L^p(v) \subset L^1(\varphi)$
- $\|v^{-\frac{1}{p}}\varphi\|_{L^{p'}} < \infty$.

Consideremos

- Para $L \in \{-\Delta + R\ ,\ -\Delta + |x|^2\ ,\ -\Delta + 2x \cdot \nabla\ \}$

Consideremos

- **Ecuación de Poisson:** $$\begin{cases} u_{tt} = Lu, & t \in (0,\infty) \times \mathbb{R}^d \\ u(0,x) = f(x) \end{cases} \qquad (P)$$

  - Para $L \in \{-\Delta + R \, , \; -\Delta + |x|^2 \, , \; -\Delta + 2x \cdot \nabla \}$

Consideremos

- **Ecuación de Poisson:** $$\begin{cases} u_{tt} = Lu, & t \in (0,\infty)\times\mathbb{R}^d \\ u(0,x) = f(x) \end{cases} \qquad \text{(P)}$$

  - Para $L \in \{-\Delta + R\ ,\ -\Delta + |x|^2\ ,\ -\Delta + 2x\cdot\nabla\ \}$
    la integrabilidad óptima sobre f en [GHSTV]

Consideremos

- **Ecuación de Poisson:** $$\begin{cases} u_{tt} = Lu, & t \in (0,\infty) \times \mathbb{R}^d \\ u(0,x) = f(x) \end{cases} \qquad \text{(P)}$$

  - Para $L \in \{-\Delta + R\ ,\ -\Delta + |x|^2\ ,\ -\Delta + 2x \cdot \nabla\ \}$ la integrabilidad óptima sobre f en [GHSTV]
  - En $(0,\infty)$ para $L \in \{-\partial_{yy} + \left[y^2 + \frac{\alpha^2 - \frac{1}{4}}{y^2}\right]$ con $\alpha > -1$ y todos sist. de Laguerre$\}$

Consideremos

- **Ecuación de Poisson:** $\begin{cases} u_{tt} = Lu, & t \in (0,\infty) \times \mathbb{R}^d \\ u(0,x) = f(x) \end{cases}$ (P)

  - Para $L \in \{-\Delta + R \,,\ -\Delta + |x|^2 \,,\ -\Delta + 2x \cdot \nabla\,\}$ la integrabilidad óptima sobre f en [GHSTV]
  - En $(0,\infty)$ para $L \in \{-\partial_{yy} + \left[y^2 + \frac{\alpha^2 - \frac{1}{4}}{y^2}\right]$ con $\alpha > -1$ y todos sist. de Laguerre$\}$ la integrabilidad óptima sobre f en [GHSV]

Consideremos

- **Ecuación de Poisson:** $$\begin{cases} u_{tt} = Lu, & t \in (0,\infty) \times \mathbb{R}^d \\ u(0,x) = f(x) \end{cases} \qquad \text{(P)}$$

  - Para $L \in \{-\Delta + R\ ,\ -\Delta + |x|^2\ ,\ -\Delta + 2x \cdot \nabla\ \}$
    la integrabilidad óptima sobre f en [GHSTV]
  - En $(0,\infty)$ para
    $L \in \{-\partial_{yy} + \left[y^2 + \frac{\alpha^2 - \frac{1}{4}}{y^2}\right]$ con $\alpha > -1$ y todos sist. de Laguerre$\}$
    la integrabilidad óptima sobre f en [GHSV]
  - En $(0,\infty)$ para $L \in \{-\frac{d^2}{dx^2} - \frac{2\lambda}{x}\frac{d}{dx}$ con $\lambda > -\frac{1}{2}\}$
    la integrabilidad óptima sobre f en [C]

L-Poisson

Dificultad: Fórmula integral:

$$p_t(x, y) = \frac{t}{\sqrt{4\pi}} \int_0^\infty e^{-\frac{t^2}{4u}} h_u(x, y) \frac{du}{u^{3/2}}$$

Dificultad: Fórmula integral:

$$p_t(x,y) \;=\; \frac{t}{\sqrt{4\pi}} \int_0^\infty e^{-\frac{t^2}{4u}}\, h_u(x,y)\, \frac{du}{u^{3/2}}$$

donde $h_u(x,y)$ es el núcleo del calor, fórmula explícita

L	heat	Poisson
$-\Delta + R$	$\int_{\mathbb{R}^d} \lvert f(y)\rvert\, e^{-\frac{\lvert y\rvert^2}{4s}}\, dy < \infty$ $\forall\, s \in (0, \mathrm{T})$	$\int_{\mathbb{R}^d} \lvert f(y)\rvert \frac{e^{-\sqrt{R}\sqrt{1+\lvert y\rvert^2}}}{(1+\lvert y\rvert)^{\frac{d}{2}+1}}\, dy < \infty$
$-\Delta + \lvert x\rvert^2$	$\int_{\mathbb{R}^d} \lvert f(y)\rvert\, e^{-\frac{\lvert y\rvert^2}{4s}}\, dy < \infty$ $\forall\, s \in (0, \mathrm{th}\,(2\mathrm{T})/2)$	$\int_{\mathbb{R}^d} \lvert f(y)\rvert \frac{e^{-\lvert y\rvert^2/2}}{(1+\lvert y\rvert)^{\frac{d}{2}} [\ln(e+\lvert y\rvert)]^{3/2}}\, dy < \infty$
$-\Delta + 2x\cdot\nabla$	$\int_{\mathbb{R}^d} \lvert f(y)\rvert\, e^{-(\frac{1}{s}+2)\frac{\lvert y\rvert^2}{4}}\, dy < \infty$ $\forall\, s \in (0, \mathrm{th}\,(2\mathrm{T})/2)$	$\int_{\mathbb{R}^d} \lvert f(y)\rvert \frac{e^{-\lvert y\rvert^2}}{[\ln(e+\lvert y\rvert)]^{1/2}}\, dy < \infty$

Table: Necesaria y suficiente condiciones sobre f para la existencia de $e^{-tL}f$ y $e^{-t\sqrt{L}}f$.

Mejora resultado de Muckenhoupt'69

Laguerre-Poisson

autovalores	operador dif	función φ
$L_n^{(\alpha)}$	$\mathbb{L} = -y\,\partial_{yy} \,-\, (\alpha+1-y)\,\partial_y$	$\dfrac{y^\alpha e^{-y}}{[\ln(e+y)]^{\frac{1}{2}}}$
φ_n^α	$L = -\partial_{yy} + y^2 + \frac{1}{y^2}(\alpha^2 - \frac{1}{4}) \,-\, 2(\alpha+1)$	$\dfrac{y^{\alpha+\frac{1}{2}}\, e^{-y^2/2}}{[\ln(e+y)]^{\frac{1}{2}}}$
$\mathfrak{L}_n^\alpha$	$\mathfrak{L} = -y\partial_{yy} - \partial_y + \frac{1}{4}\left[y + \frac{\alpha^2}{y}\right] \,-\, \frac{\alpha+1}{2}$	$\dfrac{y^{\frac{\alpha}{2}}\, e^{-y/2}}{[\ln(e+y)]^{\frac{1}{2}}}$
ℓ_n^α	$\mathcal{L} = -y\partial_{yy} - (\alpha+1)\partial_y + \frac{y}{4} \,+\, \frac{\alpha+1}{2}$	$\dfrac{y^\alpha e^{-y/2}}{[\ln(e+y)]^{\frac{1}{2}}}$
ψ_n^α	$\Lambda = -\partial_{yy} - \frac{2\alpha+1}{y}\partial_y \,+ y^2 \,-\, 2(\alpha+1)$	$\dfrac{y^{2\alpha+1}\, e^{-y^2/2}}{[\ln(e+y)]^{\frac{1}{2}}}$

Table: Tabla de funciones-φ para varios operadores de tipo Laguerre .

Mejora resultado de Muckenhoupt'69

Bessel-Calor-Poisson

L	heat	Poisson
$\Delta_\lambda = -\frac{d^2}{dx^2} - \frac{2\lambda}{x}\frac{d}{dx}$	$\int_{\mathbb{R}} \lvert f(y)\rvert\,(y \wedge 1)^{2\lambda} e^{-\frac{y^2}{4t}}\,dy < \infty$	$\int_{\mathbb{R}} \lvert f(y)\rvert \frac{y^{2\lambda}}{(y+1)^{2\lambda+2}}\,dy < \infty$

Table: Necesaria y suficiente condiciones sobre f para la existencia de $e^{-tL}f$ y $e^{-t\sqrt{L}}f$.

- Consideremos, $\lambda > -\frac{1}{2}$,

$$L = \Delta_\lambda = -\frac{d^2}{dx^2} - \frac{2\lambda}{x}\frac{d}{dx}, \tag{0.1}$$

Bessel-Poisson

- Consideremos, $\lambda > -\frac{1}{2}$,

$$L = \Delta_\lambda = -\frac{d^2}{dx^2} - \frac{2\lambda}{x}\frac{d}{dx}, \qquad (0.1)$$

- Autoadjunto en $L^2(\mathbb{R}^+, d\mu_\lambda)$ y $d\mu_\lambda(x) = x^{2\lambda}dx$, $x > 0$.

- Consideremos, $\lambda > -\frac{1}{2}$,

$$L = \Delta_\lambda = -\frac{d^2}{dx^2} - \frac{2\lambda}{x}\frac{d}{dx}, \tag{0.1}$$

- Autoadjunto en $L^2(\mathbb{R}^+, d\mu_\lambda)$ y $d\mu_\lambda(x) = x^{2\lambda}dx$, $x > 0$.
- Autofunciones Δ_λ:

$$\varphi_z^\lambda(x) = (z^\lambda x)^{-\lambda+\frac{1}{2}}\mathcal{J}_{\lambda-\frac{1}{2}}(zx),$$

donde $x, z > 0$ y $\mathcal{J}_\nu$ es la función de Bessel de primer tipo y orden $\nu > -1$

- Consideremos, $\lambda > -\frac{1}{2}$,

$$L = \Delta_\lambda = -\frac{d^2}{dx^2} - \frac{2\lambda}{x}\frac{d}{dx}, \tag{0.1}$$

- Autoadjunto en $L^2(\mathbb{R}^+, d\mu_\lambda)$ y $d\mu_\lambda(x) = x^{2\lambda}dx$, $x > 0$.
- Autofunciones Δ_λ:

$$\varphi_z^\lambda(x) = (z^\lambda x)^{-\lambda+\frac{1}{2}} \mathcal{J}_{\lambda-\frac{1}{2}}(zx),$$

  donde $x, z > 0$ y $\mathcal{J}_\nu$ es la función de Bessel de primer tipo y orden $\nu > -1$
- Para $\lambda > -\frac{1}{2}$,

$$\Delta_\lambda \varphi_z^\lambda = z^2 \varphi_z^\lambda, \tag{0.2}$$

  para $z > 0$.

El núcleo del calor ($\partial_t u = -\Delta_\lambda u$) es

El núcleo del calor ($\partial_t u = -\Delta_\lambda u$) es

$$W_t^\lambda(x,y) = \int_0^\infty e^{-z^2 t} \varphi_z^\lambda(x) \varphi_z^\lambda(y) d\mu_\lambda(z),$$

El núcleo del calor ($\partial_t u = -\Delta_\lambda u$) es

$$W_t^\lambda(x,y) = \int_0^\infty e^{-z^2 t}\varphi_z^\lambda(x)\varphi_z^\lambda(y)d\mu_\lambda(z),$$

Explícitamente

$$W_t^\lambda(x,y) = \frac{(xy)^{-\lambda+\frac{1}{2}}}{2t} e^{-\frac{(x^2+y^2)}{4t}} \mathcal{I}_{\lambda-\frac{1}{2}}\left(\frac{xy}{2t}\right),$$

Bessel-Calor

El núcleo del calor ($\partial_t u = -\Delta_\lambda u$) es

$$W_t^\lambda(x,y) = \int_0^\infty e^{-z^2 t} \varphi_z^\lambda(x)\varphi_z^\lambda(y) d\mu_\lambda(z),$$

Explícitamente

$$W_t^\lambda(x,y) = \frac{(xy)^{-\lambda+\frac{1}{2}}}{2t} e^{-\frac{(x^2+y^2)}{4t}} \mathcal{I}_{\lambda-\frac{1}{2}}\left(\frac{xy}{2t}\right),$$

donde $\mathcal{I}_\nu$ es la modificada función de Bessel de 1er tipo y orden $\nu > -1$

Expresión explícita en términos de hipergeométrica funciones

Bessel-Poisson

Expresión explícita en términos de hipergeométrica funciones

$$P_t^\lambda(x,y) = \int_0^\infty e^{-zt}\varphi_z^\lambda(x)\varphi_z^\lambda(y)d\mu_\lambda(z),$$

Expresión explícita en términos de hipergeométrica funciones

$$P_t^\lambda(x,y) = \int_0^\infty e^{-zt}\varphi_z^\lambda(x)\varphi_z^\lambda(y)\,d\mu_\lambda(z),$$

Fórmula de subordinación

$$P_t^\lambda(x,y) = \frac{t}{\sqrt{4\pi}}\int_0^\infty e^{-\frac{t^2}{4u}}W_u^\lambda(x,y)\frac{du}{u^{\frac{3}{2}}}.$$

Expresión explícita en términos de hipergeométrica funciones

$$P_t^\lambda(x,y) = \int_0^\infty e^{-zt}\varphi_z^\lambda(x)\varphi_z^\lambda(y)\,d\mu_\lambda(z),$$

Fórmula de subordinación

$$P_t^\lambda(x,y) = \frac{t}{\sqrt{4\pi}}\int_0^\infty e^{-\frac{t^2}{4u}} W_u^\lambda(x,y)\frac{du}{u^{\frac{3}{2}}}.$$

Lema

Given $t>0$ and $x>0$ there exists a constant c_λ such that

$$\frac{c_\lambda^{-1} t}{[(x-y)^2+t^2](x^2+y^2+t^2)^\lambda} \le P_t^\lambda(x,y) \le \frac{c_\lambda t}{[(x-y)^2+t^2](x^2+y^2+t^2)^\lambda}$$

Bessel-Poisson

Como

$$P_t^\lambda(x,y) \simeq \frac{t}{[(x-y)^2+t^2](x^2+y^2+t^2)^\lambda}$$

Como

$$P_t^\lambda(x,y) \simeq \frac{t}{[(x-y)^2+t^2](x^2+y^2+t^2)^\lambda}$$

Como en el caso clásico, se sigue que

$$\frac{c_{x,t}^{-1}y^{2\lambda}}{(y+1)^{2\lambda+2}} \leq y^{2\lambda}P_t^\lambda(x,y) \leq \frac{c_{x,t}y^{2\lambda}}{(y+1)^{2\lambda+2}}$$

Optima f, B-Poisson

Optima f, B-Poisson

Proposición 2:

Sea $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{C}$ medible. Entonces son equivalentes:

- $\int\limits_0^\infty P_t^\lambda(x,y)|f(y)|d\mu_\lambda(y) < \infty$, for all $t > 0$ and $x > 0$.

Proposición 2:

Sea $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{C}$ medible. Entonces son equivalentes:

- $\int_0^\infty P_t^\lambda(x,y)|f(y)|d\mu_\lambda(y) < \infty$, for all $t > 0$ and $x > 0$.
- $\int_0^\infty P_t^\lambda(x_t,y)|f(y)|d\mu_\lambda(y) < \infty$, for all $t > 0$ and some $x_t > 0$.

Optima f, B-Poisson

Proposición 2:

Sea $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{C}$ medible. Entonces son equivalentes:

- $\int_0^\infty P_t^\lambda(x,y)|f(y)|d\mu_\lambda(y) < \infty$, for all $t > 0$ and $x > 0$.
- $\int_0^\infty P_t^\lambda(x_t,y)|f(y)|d\mu_\lambda(y) < \infty$, for all $t > 0$ and some $x_t > 0$.
- $\int_0^\infty \varphi^\lambda(y)|f(y)|dy < \infty$, donde

$$\varphi^\lambda(y) = \frac{y^{2\lambda}}{(y+1)^{2\lambda+2}}.$$

Más aún

Más aún

Teorema

Si $f \in L^1(\varphi^\lambda(y))$ con $\varphi^\lambda(y) = \frac{y^{2\lambda}}{(y+1)^{2\lambda+2}}$ entonces

- $u(x,t) = f * p_t(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^+)$ y satisface $u_t t + \Delta_\lambda u = 0$
- existe $\lim_{t \mapsto 0} f * p_t(x) = f(x)$ para $a.e. x \in \mathbb{R}^+$

Más aún

Teorema

Si $f \in L^1(\varphi^\lambda(y))$ con $\varphi^\lambda(y) = \frac{y^{2\lambda}}{(y+1)^{2\lambda+2}}$ entonces

- $u(x,t) = f * p_t(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^+)$ y satisface $u_t t + \Delta_\lambda u = 0$
- existe $\lim_{t\mapsto 0} f * p_t(x) = f(x)$ para $a.e.x \in \mathbb{R}^+$

Cota por arriba más precisa

Cota por arriba más precisa

Proposición:

Para $\lambda > -\frac{1}{2}$,

$$y^{2\lambda} P_t^{\lambda}(x,y) \leq C_\lambda < (\frac{x}{x+t})^{2\lambda} > P_t^{\triangle}(x-y)\chi_{\frac{x}{2}<y\leq 2x}(y) \\ + c(x) t \varphi_\lambda(y),$$

where $< z >= z \vee 1$, $P_t^{\Delta}(x) = c\frac{t}{t^2+x^2}$ is the classical Poisson kernel and $c(x) = C_\lambda (x \wedge 1)^{-(2\lambda+2)}$

Cota por arriba más precisa

Proposición:

Para $\lambda > -\frac{1}{2}$,

$$y^{2\lambda} P_t^{\lambda}(x,y) \leq C_\lambda < (\frac{x}{x+t})^{2\lambda} > P_t^{\triangle}(x-y)\chi_{\frac{x}{2}<y\leq 2x}(y)$$
$$+c(x)t\varphi_\lambda(y),$$

where $< z >= z \vee 1$, $P_t^{\Delta}(x) = c\frac{t}{t^2+x^2}$ is the classical Poisson kernel and $c(x) = C_\lambda (x \wedge 1)^{-(2\lambda+2)}$

$$\lim_{t\to 0^+} P_t^\lambda f(x) = f(x), \quad \forall x \in \mathcal{L}_f \text{ (conjunto de Lebesgue de f).}$$

$$\int_0^\infty P_t^\lambda(x,y)d\mu_\lambda(y) = 1$$

$$P_t^\lambda f(x) - f(x) \leq \int\limits_0^\infty P_t^\lambda(x,y)|f(y)-f(x)|d\mu_\lambda(y)$$

$$\leq C_\lambda < (\frac{x}{x+t})^{2\lambda} > \int\limits_0^\infty P_t^\triangle(x-y)\chi_{\frac{x}{2}<y\leq 2x}(y)|f(y)-f(x)|dy$$

$$+ tc'(x)\int\limits_0^\infty \varphi_\lambda(y)|f(y)-f(x)|dy.$$

Corolario:

Sea $v : \mathbb{R}^d \to (0,\infty)$ medible $1 \leq p < \infty$ y $\varphi^\lambda(y) = \frac{y^{2\lambda}}{(y+1)^{2\lambda+2}}$. Entonces son equivalentes:

- Para toda $f \in L^p(v)$, $u(x,t) = f * p_t(x)$ existe $\forall t, x$ y resuelve (P)

óptima $f \in L^p(v)$- Poisson-Bessel

Corolario:

Sea $v : \mathbb{R}^d \to (0, \infty)$ medible $1 \leq p < \infty$ y $\varphi^\lambda(y) = \frac{y^{2\lambda}}{(y+1)^{2\lambda+2}}$. Entonces son equivalentes:

- Para toda $f \in L^p(v)$, $u(x,t) = f * p_t(x)$ existe $\forall t, x$ y resuelve (P)
- $\|v^{-\frac{1}{p}} \varphi^\lambda(y)\|_{L^{p'}} < \infty$.

Corolario:

Sea $v : \mathbb{R}^d \to (0, \infty)$ medible $1 \leq p < \infty$ y $\varphi^\lambda(y) = \frac{y^{2\lambda}}{(y+1)^{2\lambda+2}}$. Entonces son equivalentes:

- Para toda $f \in L^p(v)$, $u(x,t) = f * p_t(x)$ existe $\forall t, x$ y resuelve (P)
- $\|v^{-\frac{1}{p}} \varphi^\lambda(y)\|_{L^{p'}} < \infty$.

óptima $f \in L^p(v)$- Poisson-Bessel

Corolario:

Sea $v : \mathbb{R}^d \to (0,\infty)$ medible $1 \le p < \infty$ y $\varphi^\lambda(y) = \frac{y^{2\lambda}}{(y+1)^{2\lambda+2}}$. Entonces son equivalentes:

- Para toda $f \in L^p(v)$, $u(x,t) = f * p_t(x)$ existe $\forall t, x$ y resuelve (P)
- $\|v^{-\frac{1}{p}}\varphi^\lambda(y)\|_{L^{p'}} < \infty$.
- $L^p(v) \subset L^1(\varphi^\lambda(y))$

Reference

- Cardozo, I., On the pointwise convergence to initial data of heat and Poisson problems for the Bessel operator. To appear in J. Evolution Equations.
- J. Dlugosz, Almost everywhere of some summability methods for Laguerre series. Studia Math **LXXXII** (1985), 199–209.
- G. Gasrrigós, S. Hartzstein, T. Signes,J. L. Torrea and B. Viviani, Pointwise convergence to initial data of heat and Laplace equations.To appear in Trans. A.M.S.
- G. Gasrrigós, S. Hartzstein, T. Signes and B. Viviani, A.E Convergence and 2-Weight Inequalities for Poisson-Laguerre Semigrops". Prepint
- S. I. Hartzstein, J. L. Torrea and B. E. Viviani, A note on the convergence to initial data of Heat and Poisson equation. Proc. Amer. Math. Soc. **141** (2013), 1323-1333.
- B. Muckenhoupt, *Poisson integrals for Hermite and Laguerre expansions.* Trans. A.M.S.**139** (1969),231–242.

Reference

D. V. Widder, *The heat equation*. Acad. Press, New York, 1975.

C. H. Wilcox, Positive temperatures with prescribed initial heat distributions. Amer. Math. Month **87** (3) (1980), 183–186.

MUCHAS GRACIAS...